数理物理における放物線形偏微分方程式について(第一報)

古　谷　嘉　志

On Parabolic partial differential equation of Mathematical physics (I)

Yoshiyuki FURUYA

Parabolic partial diffenential equation of melting problems are treated. Problems are treated by excluding the melted portion,

And the Author obtained an asymptotic solution.

は し が き

放物線形偏微分方程式の最大最小の定理を熱によって固体が融ける時の融解面の移動を解析する問題に適用する。この論文では融けた液体の部分を取り除いて融かして行く問題を取り扱う。

基 礎 理 論……(1)

放物線形偏微分方程式

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}+cu-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad a>0 \cdots\cdots(1)$$

係数は $x-t$ の関数とする。

$x-t$ 平面上の与えられた領域をDとする。

$c>0$ のとき u は正の最大値と負の最小値をとらない。

なぜなら正の最大値をとるとすると $a\partial^2u/\partial x^2=-cu>0$ $\therefore$ $\partial^2u/\partial x^2>0$ で不合理。負の最小値の不合理も同様。

次に c は任意の値とする。$u(xt)=e^{-kt}v(x,t)$ とおくと(1)は

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial v}{\partial x}+(c-k)v-\frac{\partial v}{\partial t}=0 \cdots\cdots\cdots(2)$$

$c<k$ にとると上の理論がそのまま適用できる。故に図—1のような $x=f(t)$, $x=g(t)$, $t=t_1$, $t=t_2$ で囲まれた領域Dにおいて $t_1<t_0<t_2$ なる直線 $t=t_0$ に沿って u は正ならば下向きに凸であり u が負ならば上向きに凸てある。

以上の事から次の定理が得られる。

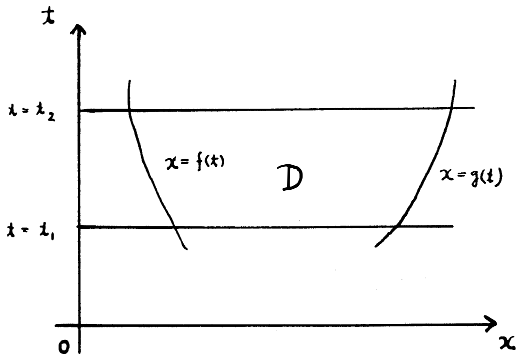
〔1〕 $x=f(t)$, $x=g(t)$ 上で $u=0$ ならDで $u=0$

〔2〕 $x=f(t)$, $x=g(t)$ 上で $u=0$ ならD内で $u=0$

〔3〕 $x=f(t)$, $x=g(t)$ 上で u の値が与えられれば u はD内で一意に決定する。

〔4〕 $|u|$ は $x=f(t)$, $x=g(t)$ 上で最大値をとる。

〔5〕 $x=f(t)$, $x=g(t)$ 上で $\partial u/\partial x=F(t)$ が与えられている時



図—1

$x=f(t)$ 上で $F(t)<0$, $r=g(t)$ 上で $F(t)>0$ ならD内で $u>0$,

$x=f(t)$ 上で $F(t)>0$, $x=g(t)$ 上で $F(t)<0$ ならD内で $u<0$,

〔6〕 $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}=0$ で $x=f(t)$, $x=g(t)$ 上で $\partial u/\partial x=0$, その一点で $u=k$ ならD内で $u=k$

証明　$\partial u/\partial x=v$ とおき原方程式を x で微分すると

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial a}{\partial x}+b\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial x}v-\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

境界条件は　　$v=0$

ゆえにD内で　$v=\frac{\partial u}{\partial x}=0$

$$\therefore \quad u(x,t)=\text{一定}$$

一点で $u=k$ であるからD内で

$$u(x,t)=k$$

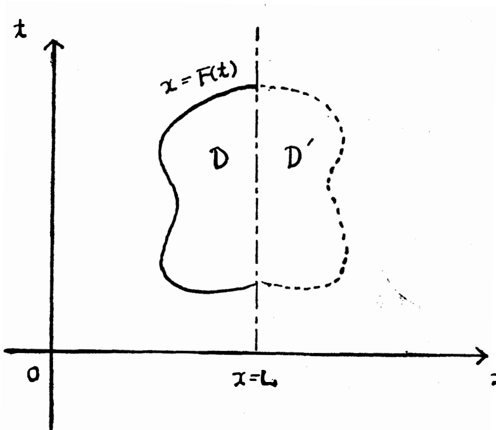
〔7〕 図—2のように $x=F(t)$ と $x=L$ でかこまれた領域Dにおいて

$x=L$ 上で $\partial u/\partial x=0$

$x=F(t)$ 上で $\partial u/\partial x=f(t)$

が与えられているなら

$f(t)<0$ なら D内で $u>0$



図—2

$f(t)>0$ なら D内で $u>0$

$f(t)>0$ なら D内で $u<0$

証明　$x=L$ を中心にしてDを対称に解析接続する。

延長した領域をD′とすると定理〔5〕により $f(t)=0$ なら $D+D'$ 内で $u=0$,

ゆえに　D内で $u=0$

基　礎　理　論……(2)

長さLの棒 $(0,\ L)$ の一方の端 $x=0$ に熱量 $Q(t)$ を与えて融解させる。融解する面を $s(t)$ 融解温度を T_m とし初期温度を0とする。と

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}\cdots\cdots(1)$$

$$T(x,0)=0\quad\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial T(L,\ t)}{\partial x}=0\quad 0<t<t_L\cdots\cdots(3)$$

$$-K\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=Q(t)\quad 0<t<t_m\cdots\cdots(4)$$

$$-K_m\frac{\partial T(s,\ t)}{\partial x}=Q(t)-\rho m\ell\dot{s}\quad t_m<t<t_L\cdots\cdots(5)$$

$$T(s,t)=T_mt\quad {}_m<t<t_L\cdots\cdots(6)$$

Kは熱伝導係数，ρは密度，cは比熱

t_mは融け始める温度，t_Lは融け終る温度

$s(t_L)=L$，また添字は融解する状態を示す。

〔1〕 解の唯一性。$Q(t)$を与えれば $s(t)$ は一意に決定する。

証明　$s_2>s_1$ なる二つの解が存在したとすると,

$$\int_0^t Q(t)dt=(\rho m\ell+H_m)s_2+\int_{S_2(t)}^L H_2dx\cdots\cdots(a)$$

$$\int_0^t Q(t)dt=(\rho m\ell+H_m)s_1+\int_{S_1(t)}^L H_1dx\cdots\cdots(b)$$

$$H(T)=\int_0^T c(T')\rho(T')dT'$$

$$H(T_1)=H_1,\quad H(T_2)=H_1,\quad H(T_m)=H_m$$

(a)−(b),

$$0=(\rho m\ell+H_m)(s_2-s_1)+\int_{S_2}^L H_2dx-\int_{S_1}^{S_2}H_1dx-$$

$\int_{S_2}^L H_1dx$ (s_1,s_2) で $H_1<H_m$, $(s_2,\ L)$ で $H_1<H_2$ を考えに入れると

右辺$>\rho m\ell(s_2-s_1)+\int_{S_2}^L(H_2-H_1)dx>0$ となり不合理。

〔2〕 $Q_2>Q_1$ なら $s_2<s_1$

証明　$s_1>s_2$ とする。

$$\int_0^t Q_2(t)dt=(\rho m\ell+H_m)s_2+\int_{S_2}^L H_2dx\cdots\cdots(a)$$

$$\int_0^t Q_1(t)dt=(\rho m1+H_m)s_1+\int_{S_1}^L H_1dx\cdots\cdots(b)$$

(a)−(b),

$$\int_0^t\{Q_2(t)-Q_1(t)\}dt=(\rho m\ell+H_m)(s_2-s_1)+\int_{S_2}^{S1}H_2dx+\int_{S_1}^L(H_2-H_1)dx$$

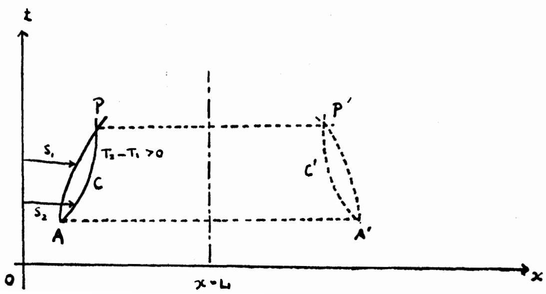
(左辺) >0

(s_2,s_1) で $H_2<H_m$, $(s_1,\ L)$ で $H_2<H_1$ であることを考えに入れると

(右辺) $<\rho m\ell(s_2-s_1)+\int_{S_2}^L(H_2-H_1)dx<0$, で不合理,

〔3〕 $Q_2>Q_1$ のとき s_1 は途中で s_2 より大になることはない。

証明　図—3のように s_2 が途中で s_1 を越したとする。$x=L$を中心にして図の如く対称に解析接続する。



図—3

ACP上（両端の点は除く，以下同様）で $T_2-T_1>0$，ゆえに領域 ACPP′C′A′ で $T_2-T_1>0$，ゆえに PP′ 上で $T_2-T_1\geqq 0$,

一方(5)より

$$-K_m\frac{\partial(T_2-T_1)}{\partial x}=\{Q_2(t)-Q_1(t)\}-\rho m\ell(\dot{s}_2-\dot{s}_1)$$

Pにおいて $Q_2>Q_1$, $\dot{s}_2<\dot{s}_1$　$T_2=T_1$

$$\therefore \quad \frac{\partial(T_2-T_1)}{\partial x}<0$$

ゆえに pp′ 上で $T_2-T_1<0$ となり不合理である。

近似計算例

ρ, c, K を一定とし $K/\rho c=k$ とおき $Q(t)=F=$一定 とする。

$$\frac{\partial T}{\partial t}=k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \cdots\cdots(1)$$

時間は $x=0$ の温度が T_m になった時を $t=0$ とする。

$$T=T_m+a_1x+(x^2+2kt)a_2 \quad \cdots\cdots(2)$$

とおく。[3),4)]

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=l}=0 \quad \text{より} \quad a_1=-2a_2\ell$$

$$\therefore \quad T=T_m+(x^2-2\ell x=2kt)a_2 \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=2a_2(x-\ell) \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\text{また} \quad -K\frac{\partial T(s,\ t)}{\partial x}=F-\partial\ell\dot{s} \quad \cdots\cdots(5)$$

(5)と(4)より

$$-2a_2(s-\ell)F-\rho\ell\dot{s} \quad \cdots\cdots(6)$$

$T(s,t)=T_m$ を考えに入れ(3)より

$$s^2-2\ell s+2kt=0 \quad \cdots\cdots(7)$$

$$S=A_1t+A_2t^2+A_3t^3+\cdots\cdots$$

とおいて(7)に代入し係数を決定すると,

$$S=\frac{k}{\ell}t+\frac{k^2}{2\ell^3}t^2+ \quad \cdots\cdots(8)$$

(8)を(6)に代入すると

$$-2K\left(\frac{k}{\ell}t+\frac{k^2}{2\ell^3}t^2+\cdots\cdots-\ell\right)a_2$$

$$=F-\rho\ell\left(\frac{k}{\ell}+\frac{k^2}{\ell^3}t+\cdots\cdots\right)$$

$t=0$ とおくことにより

$$a_2=\frac{F-\rho k}{2K\ell}$$

(3)より

$$T=T_m+\frac{F-\rho k}{2K\ell}(x^2-2\ell x+2kt) \quad \cdots\cdots(9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{F-\rho k}{K\ell}(x-\ell)$$

(5)より

$$-\frac{F-\rho k}{\ell}(s-\ell)=F-\rho\ell\dot{s}$$

$$\therefore \quad \dot{s}-\frac{F-\rho k}{\rho\ell^2}S=\frac{k}{\ell} \quad \cdots\cdots(10)$$

$$S=B_1t+B_2t^2+B_3t^3+\cdots\cdots$$

とおくと

$$\dot{s}=B_1+2B_2t+3B_3t^2+\cdots\cdots$$

(10)に代入して

$$B_1+\left(2B_2-\frac{F-\rho k}{\rho\ell^2}B_1\right)t$$

$$+\left(3B_3-\frac{F-\rho k}{\rho\ell_2}\right)t^2=\frac{k}{\ell},$$

ゆえに

$$S=\frac{k}{\ell}t+\frac{k(F-\rho k)}{2\rho\ell^3}t^2+\frac{k(F-\rho k)^2}{6\rho^2\ell^5}t^3$$

$$+\cdots\cdots(11)$$

結　　語

放物線形偏微分方程式の最大最小の定理を用いて $Q(t)$ に対する $s(t)$ の一意性, $Q(t)$ を大きくすると $s(t)$ は大きくなることが示された。

またTを二次式近似し $s(t)$ の級数解を(11)のようにTの級数解を(9)のように得た。

Tを二次式で近似することが非常に大きな仮定であるが解の性質は本文に述べた事柄によく一致している。さらに深い検討を今後加えることにする。最後に御支援を賜った本学教援長元亀久男先生に感謝の意を示す。

参考文献

1) B. A. Boley; "Upperand Lower Bounds For the Solution of a Meltingproblem." Q. Appl. Matk. Vol XXI No. 1 1963

2) 犬井鉄郎 "応用偏微分方程式論"

3) H. S. Carslawand J. C. Jaeger. "Conduction of heat in solid." Oxford. 1959

4) T. R. Goodman and J. L. Skea; "The Melting of Finite slabs." J. Appl. Mech. 27, 1960

(昭和40.10.30受付)